1^{o} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν α>0 με $\alpha \neq 1$, να αποδείξετε ότι για κάθε θ>0 και $\kappa \in IR$ ισχύει: $\log_{\alpha}\theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha}\theta$.

Μονάδες 10

Α2. Να δώσετε τις προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν ώστε δυο πολυώνυμα

$$P(x) = \alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

$$Q(x) = \beta_{\nu}x^{\nu} + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$$

να είναι ίσα μεταξύ τους.

Μονάδες 7

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α) Για κάθε $x \in IR$ ισχύει $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} < 3^{x}$.

Μονάδες 2

β) Το π είναι λύση της εξίσωσης συνx+1=ημx2x.

Μονάδες 2

γ) Η εξίσωση $x^4 + 3x^2 + x + 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Μονάδες 2

δ) Ισχύει $5=\ln e^{5}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να λυθεί η εξίσωση $ημ^2x$-3ημx+2=0.

Μονάδες 12

Β2. Να λυθεί η εξίσωση εφx=1 στο διάστημα [0, 3π].

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+4$ όπου $\alpha, \beta \in IR$ έχει παράγοντές τους $x+1$, x-2.

Γ1. Να αποδείξετε ότι α= -3 και β=0.

Μονάδες 8

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2\ln x+1}{2\ln x-1}$.

Δ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και το σημείο τομής της γραφικής παράστασής της με τον άξονα x΄x.

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$ για κάθε x>0 και $x\neq e^{\frac{1}{2}}, x\neq e^{-\frac{1}{2}}$.

Μονάδες 6

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3$ για κάθε x>0 και $x\neq e^{\frac{1}{2}}, x\neq e^{-\frac{1}{2}}$.

Μονάδες 7

Δ4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\ln f(e^{1000})+\ln f(e^{1001})+\ln f(e^{1002})+\ln f(e^{1003})+\ln f(e^{1004}).$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου.
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου.
Α3. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Σ, **δ)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτουμε ημx=y και λύνουμε την εξίσωση y^2-3y+2=0. Οπότε προκύπτει ημx=2 ΑΔΥΝΑΤΗ.

$$\etaμx=1\Leftrightarrow x=2κπ+\frac{π}{2}\ \ κ\in Z.$$

Β2. $εφx=εφ\dfrac{π}{4}\Leftrightarrow κπ+\dfrac{π}{4}\ \ κ\in Z.$

Επειδή $x \in [0,3\pi]$ έχουμε $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \pi + \frac{\pi}{4}$, $x_3 = 2\pi + \frac{\pi}{4}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\left.\begin{array}{l} P(-1)=0 \\ P(2)=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \alpha-\beta=-3 \\ 2\alpha+\beta=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha=-3 \\ \beta=0 \end{array}$

Γ2. $P(x)=x^3-3x+4$

Εφαρμόζουμε σχήμα Horner και προκύπτει

$$P(x)=(x+1)(x-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Γ3. Λύνουμε την ανίσωση $P(x)<0$ και προκύπτει $x \in (-\infty,-1)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\Pi.O: A=(0,e^{\frac{1}{2}})\cup(e^{\frac{1}{2}},+\infty)$

Για $f(x)=0$ προκύπτει $x=e^{-\frac{1}{2}}$

Δ2. $f(\frac{1}{x})=\dfrac{2\ln\frac{1}{x}+1}{2\ln\frac{1}{x}-1}=...=\dfrac{2\ln x-1}{2\ln x+1}=\dfrac{1}{f(x)}$

Δ3. $f(x)+2f(\frac{1}{x})=3$

$$\frac{2\ln x+1}{2\ln x-1}+2\frac{2\ln x-1}{2\ln x+1}=3 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \ln x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$$

Δ4. $A=\ln[f(e^{1000})\cdot f(e^{1001})\cdot f(e^{1002})\cdot f(e^{1003})\cdot f(e^{1004})]=$

$$=\ln[\frac{2\ln e^{1000}+1}{2\ln e^{1000}-1}\cdot\frac{2\ln e^{1001}+1}{2\ln e^{1001}-1}\cdot\frac{2\ln e^{1002}+1}{2\ln e^{1002}-1}\cdot\frac{2\ln e^{1003}+1}{2\ln e^{1003}-1}\cdot\frac{2\ln e^{1004}+1}{2\ln e^{1004}-1}]=$$

$$=\ln[\frac{2001}{1999}\cdot\frac{2003}{2001}\cdot\frac{2005}{2003}\cdot\frac{2007}{2005}\cdot\frac{2009}{2007}]=\ln\frac{2009}{1999}$$